

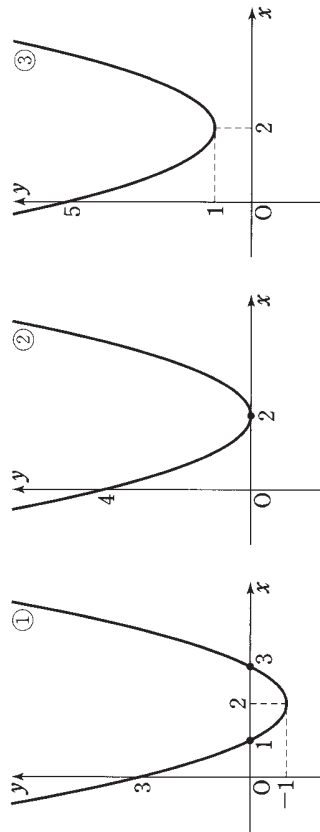
B 2次関数のグラフとx軸の位置関係

次の3つの2次関数について、そのグラフとx軸の位置関係を調べてみよう。

$y = x^2 - 4x + 3$ …… ①

$y = x^2 - 4x + 4$ …… ②

$y = x^2 - 4x + 5$ …… ③



①のグラフは、x軸と2点(1, 0), (3, 0)で交わっていて、交点のx座標は2次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ の異なる2つの実数解である。

②のグラフは、x軸とただ1点(2, 0)を共有し、共有点のx座標は2次方程式 $x^2 - 4x + 4 = 0$ の重解である。このようなとき、2次関数のグラフはx軸に接する といひ、その共有点を接点 といひ。

③のグラフはx軸と共有点をもたない。また、このとき、2次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ は実数解をもたない。

一般に、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸が共有点をもつとき、そのx座標は2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解である。特に、2次関数のグラフがx軸に接する場合、2次方程式の解は重解である。

また、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸が共有点をもたないとき、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもたない。

このことと、95ページで学んだ2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号の関係から、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸の位置関係は、次の表のようにまとめられる。

Dの符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$	重解 $x = \alpha$	実数解はない
$a > 0$ のとき $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸の位置関係			
$a < 0$ のとき $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸の位置関係			
共有点の個数	2個	1個	0個

以上のことから、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸の位置関係と、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ について、次のことが成り立つ。

2次関数のグラフとx軸の位置関係

$D > 0 \iff$ 異なる2点で交わる

$D = 0 \iff$ 1点で接する

$D < 0 \iff$ 共有点をもたない

$b^2-4ac < 0$ のときは、前ページの②の式

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

の右辺は負となるので、②を満たす実数 x は存在しない。すなわち、 $b^2-4ac < 0$ のとき、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない。

- 5 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は、解の公式において $b=2b'$ とおくことにより、次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

よって、次の公式が得られる。

- 10 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は、 $b'^2-ac \geq 0$ のとき

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

例 11 (1) 2次方程式 $3x^2-9x+2=0$ を解く。

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

(2) 2次方程式 $5x^2+6x-1=0$ を解く。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$$

終

練習 28 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2+7x+1=0$

(2) $x^2-3x-2=0$

(3) $x^2+2x-1=0$

(4) $2x^2-4x-7=0$

(5) $9x^2-12x+4=0$

(6) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

B 2次方程式の解の公式

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解を求める公式として、中学校で解の公式を学んだ。ここでそれを復習しておこう。

2次方程式①の左辺は、76ページで示したように平方完成すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる。したがって、2次方程式①は、次のように書ける。

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ゆえに

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$b^2-4ac \geq 0$ のとき、②の右辺は正または0であるから

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

この式の右辺は、 a の正負にかかわらず、 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となるから

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって、次の解の公式が得られる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、 $b^2-4ac \geq 0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【補足】 特に $b^2-4ac=0$ のとき、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

第2節 2次方程式と2次不等式

5 2次方程式

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ …… ①

のグラフが x 軸と共有点をもつとする。

- 5 その共有点の y 座標は 0 であるから、共有点の x 座標は、

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …… ②

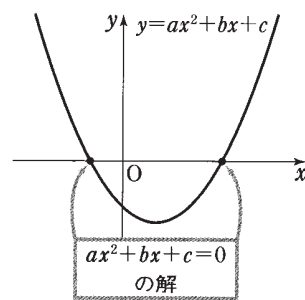
の解である。

したがって、2次関数①のグラフと x

- 10 軸の共有点について知りたいとき、2次方

程式②の解について調べればよい。また逆に、2次方程式②の解について知りたいとき、2次関数①のグラフを利用すると、解を視覚的にとらえることができる。

ここでは、まず、2次方程式の解について確認しよう。



15 A 因数分解による解法

例 10 2次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解く。

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-3)=0$

よって $x+1=0$ または $x-3=0$

すなわち $x=-1$ または $x=3$

- 20 ゆえに、解は $x=-1, 3$ 答

練習 次の2次方程式を解け。

27

(1) $x^2-6x+5=0$

(2) $x^2-5x-24=0$

(3) $2x^2+5x+2=0$

(4) $3x^2+7x-6=0$

2次方程式の実数解の個数

2次方程式における実数の解を、単に「実数解」という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解とその個数について考えよう。

$b^2-4ac>0$ のとき、解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であり、これらは異なる2つの実数解である。

$b^2-4ac=0$ のとき、解は $x = -\frac{b}{2a}$ であり、これはただ1つの実数解である。この場合は、2つの解が重なったものと考えて、この実数解を「重解」という。

$b^2-4ac<0$ のとき、前ページで述べたように、この2次方程式「実数解をもたない」。

したがって、 b^2-4ac の符号によって、解を次のように分類できる。

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
実数解	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\frac{b}{2a}$	ない
解の個数	2個	1個	0個

b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「判別式」といい、普通 D で

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$ の符号に次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ ただ1つの実数解（重解）をもつ

$D<0 \iff$ 実数解をもたない

「 $D \geq 0 \iff$ 実数解をもつ」が成り立つ。

[9]
方
2
[1]
5
[2]
解
数
[3]
...
した
...
 b^2-4
...
実数
15
 b^2-4
表す。
2次
...
ついて、
20
特に、

第2節 2次方程式と2次不等式

5 2次方程式

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ …… ①

のグラフが x 軸と共有点をもつとする。

5 その共有点の y 座標は 0 であるから、共有点の x 座標は、

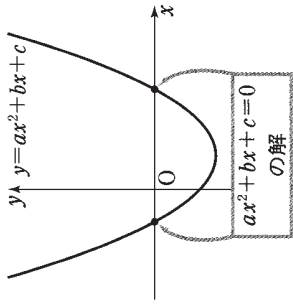
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ …… ②

の解である。

10 したがって、2次関数①のグラフと x 軸の共有点について知りたいとき、2次方

程式②の解について調べればよい。また逆に、2次方程式②の解について知りたいとき、2次関数①のグラフを利用すると、解を視覚的にとらえることができる。

ここでは、まず、2次方程式の解について確認しよう。



A 因数分解による解法

15 **例 10** 2次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解く。

左辺を因数分解すると $(x+1)(x-3) = 0$

よって $x+1=0$ または $x-3=0$

すなわち $x=-1$ または $x=3$

20 ゆえに、解は $x=-1, 3$ 答

練習 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 5 = 0$

(2) $x^2 - 5x - 24 = 0$

(3) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

(4) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

B 2次方程式の解の公式

2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots ①$$

5 の解を求める公式として、中学校で解の公式を学んだ。ここでそれを復習しておこう。

2次方程式①の左辺は、76ページで示したように平方完成すると

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

となる。したがって、2次方程式①は、次のように書ける。

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

10 ゆえに $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \dots\dots ②$

$b^2 - 4ac \geq 0$ のとき、②の右辺は正または0であるから

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

この式の右辺は、 a の正負にかかわらず、 $\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となるから

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

15 したがって、次の解の公式が得られる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

【補足】 特に $b^2 - 4ac = 0$ のとき、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$b^2-4ac < 0$ のときは、前ページの②の式

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \dots\dots ②$$

の右辺は負となるので、②を満たす実数 x は存在しない。すなわち、 $b^2-4ac < 0$ のとき、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない。

5 2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は、解の公式において $b=2b'$ とおくことにより、次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} \end{aligned}$$

よって、次の公式が得られる。

10 **2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は、 $b'^2-ac \geq 0$ のとき**

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例 11 (1) 2次方程式 $3x^2-9x+2=0$ を解く。

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2-4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

(2) 2次方程式 $5x^2+6x-1=0$ を解く。

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-5 \cdot (-1)}}{5} = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$$

練習 28 次の2次方程式を解け。

- (1) $3x^2+7x+1=0$ (2) $x^2-3x-2=0$
- (3) $x^2+2x-1=0$ (4) $2x^2-4x-7=0$
- (5) $9x^2-12x+4=0$ (6) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

C 2次方程式の実数解の個数

方程式における実数の解を、単に実2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解

[1] $b^2-4ac > 0$ のとき、解は $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

5 であり、これらは異なる2つの実数解

[2] $b^2-4ac = 0$ のとき、解は $-\frac{b}{2a}$

解である。この場合は、2つの解が重解を重解という。

[3] $b^2-4ac < 0$ のとき、前ページでは実数解をもたない。

10 したがって、 b^2-4ac の符号によって

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac > 0$
実数解	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
実数解の個数	2個

15 b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 表す。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解について、次のことが成り立つ。

$D > 0 \iff$ 異なる2つの

$D = 0 \iff$ ただ1つの実

$D < 0 \iff$ 実数解をもた

特に、「 $D \geq 0 \iff$ 実数解をもつ」

という。

の両数について考えよう。

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

がある。

つまり、これはただ1つの実数

解をもつものと考えて、この実

数解は、この2次方程式

を次のように分類できる。

$b^2-4ac > 0$	$b^2-4ac < 0$
2個	ない
0個	0個

判別式 D といひ、普通 D で

判別式 $D = b^2-4ac$ の符号に