Correction olympiades 2009

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)

2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

2
7 1
6 9
5 3 4 8

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

1
8 4
6 9
2 5 7 3

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où

$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b. Triangle 19-magique

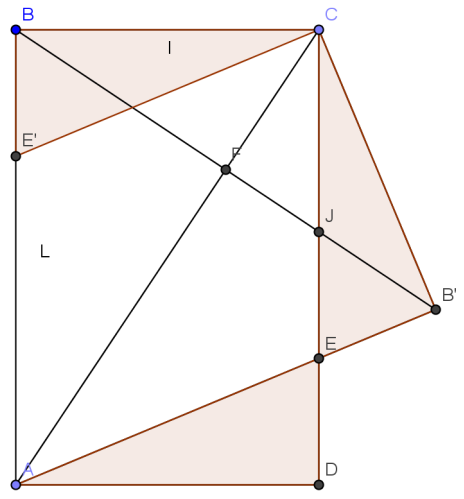
7
4 1
5 9
3 8 6 2

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

18 n'est pas *S*-magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit c = 10

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$
avec $L \geq 8$
soit : $l^2=L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

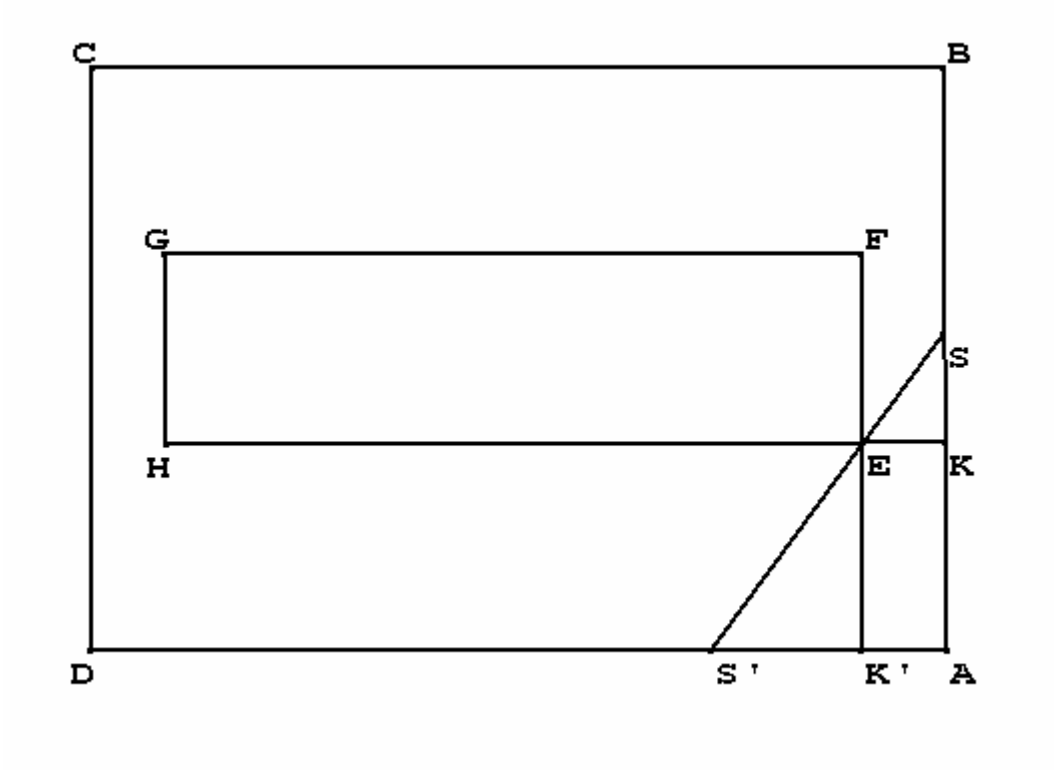
D'où l'égalité : $(L-c)l=0{,}25Ll$ d'où $c=0{,}75L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Exercice 3 :

Problème du cadre

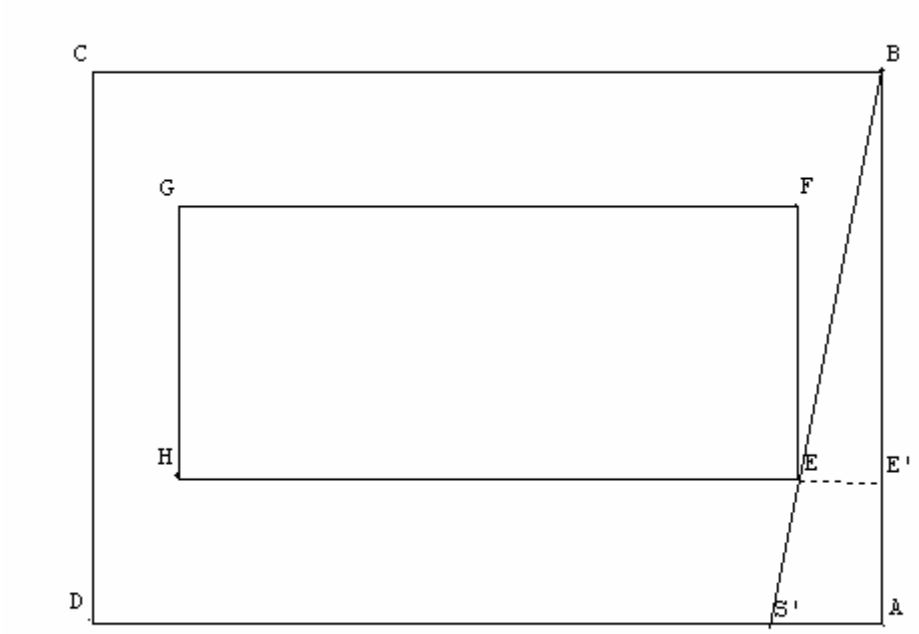
1) <u>Déterminer la longueur SS' de la section sachant que AS=AS'.</u>
Si AS= AS', alors le triangle est isocèle rectangle en A.
Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH). Alors $SK=EK=1$ cm.
Soit K' le point d'intersection de (AD) et (EF). Alors $SK'=EK'=\sqrt{3}$ cm.



Ainsi

$$SS' = \sqrt{AS^2 + AS'^2} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})^2} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} \approx 3{,}86 \text{ cm.}$$

2) <u>Calculer la longueur de la section SS' lorsque S est en B.</u>



Soit E' le point d'intersection de (HE) et (AB). On

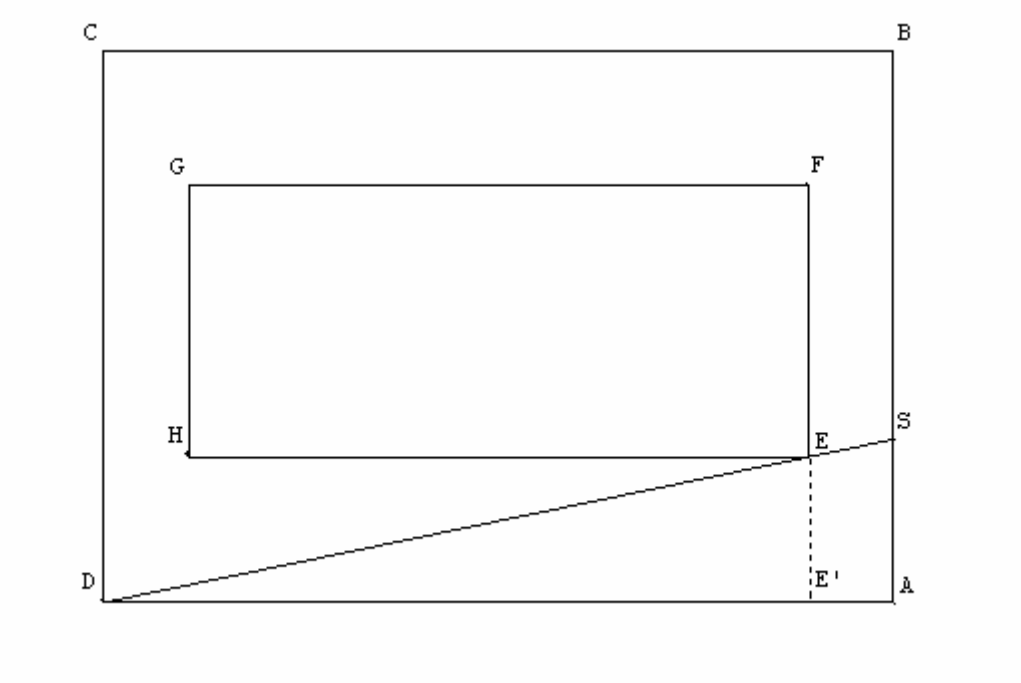
$$\tan E\hat{B}E' = \frac{EE'}{BE'} = \frac{1}{20-\sqrt{3}} = \frac{AS'}{AB} = \frac{AS'}{20}$$

Alors $AS' = \dfrac{20}{20-\sqrt{3}}$

Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = BS' = \sqrt{20^2 + \left(\frac{20}{20-\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{161600 - 16000\sqrt{3}}}{20 - \sqrt{3}} \approx 20\,\text{cm}.$$

3) <u>Même question lorsque S' est en D.</u>



Soit E' le point d'intersection de (FE) et (AD). On

$$\tan E\hat{D}E' = \frac{EE'}{DE'} = \frac{\sqrt{3}}{30-1} = \frac{\sqrt{3}}{29} = \frac{AS}{AD} = \frac{AS}{30}$$

Alors $AS = \dfrac{30\sqrt{3}}{29}$

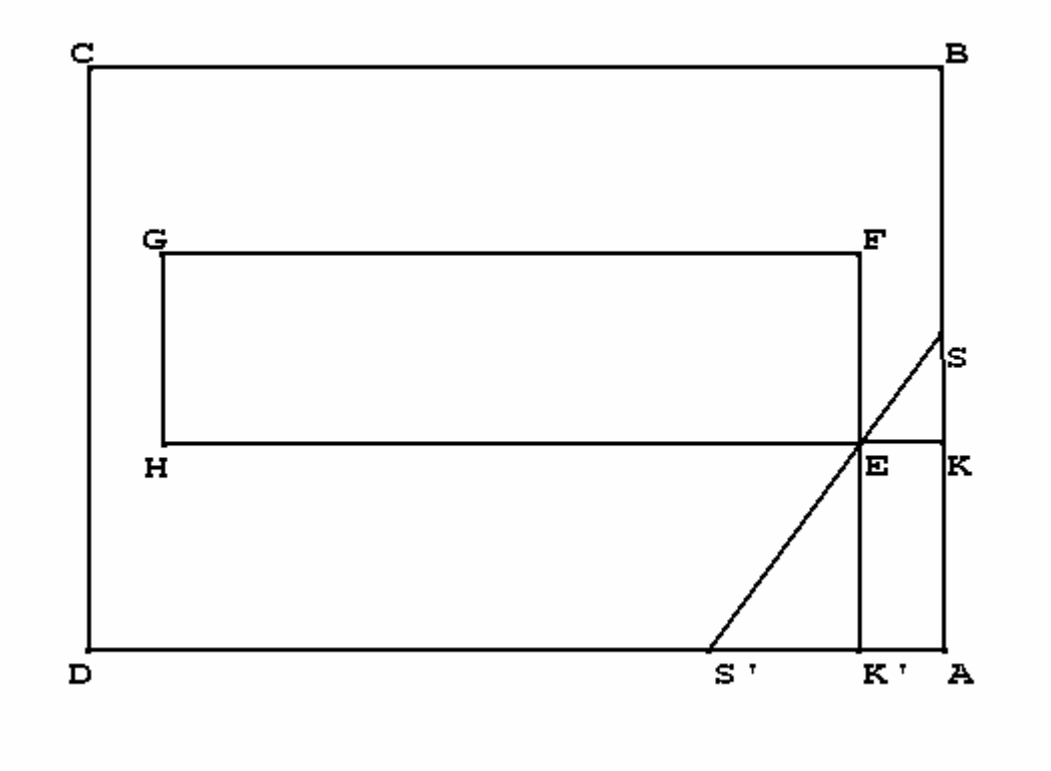
Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = DS = \sqrt{30^2 + \left(\frac{30\sqrt{3}}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{327600}{361}} \approx 30{,}12\,\text{cm}.$$

<u>4</u>) <u>Calculer la longueur de la section lorsque ES=ES'.</u>

Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH) et K' le point d'intersection de (AD) et (EF).

On note $\theta = E\hat{S}K$



On a $\sin E\hat{S}K = \sin\theta = \dfrac{EK}{SE} = \dfrac{1}{SE}$, alors $SE = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

De même $\sin E\hat{S}'K' = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \dfrac{EK'}{ES'} = \dfrac{\sqrt{3}}{ES'}$, alors $ES' = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$.

Si ES=ES', alors

$\dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ et donc $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, alors $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Ainsi

$SS' = 2SE = \dfrac{2}{\sin\theta} = 4$ cm.

Exercice 4:

1 - Considérons un repère orthonormé d'origine O, dans lequel M aura pour coordonnées (x , y)

Soient A_1, A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.

$A_1 = 40\,x$

$A_2 = \dfrac{(120 + 120 - x)\times(80 - y)}{2}$

$A_3 = \dfrac{(120 + 120 - x)\times y}{2}$

De $A_2 = A_3$ il résulte que $80 - y = y$ d'où $y = 40$.

De $A_1 = A_3$ il résulte que $2x = 240 - x$ d'où $x = 80$.

Le point M est unique et il a pour coordonnées (80 , 40) dans le repère ci-dessus.

2 - Soient A_1, A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.

Puisque les trois parties ont la même aire : $A_1 = A_2 = A_3 = \dfrac{80\times120}{3} = 3200cm^2$

En particulier $A_2 = \alpha\ r^2 = 3\ 200$ où r est le rayon du disque central, donc :

$$r = \sqrt{\frac{3200}{\pi}} \approx 31{,}9 < \frac{80}{2}$$

Donc le disque est bien contenu dans le drapeau. Quant aux parties 1 et 3 leur aire est bien égale à

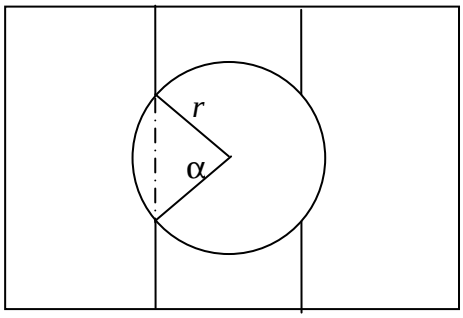
$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$ de l'aire du drapeau.

3 – a) Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 les aires respectives des parties 1, 2, 3 et 4.

Puisque les quatre parties ont la même aire : $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \dfrac{80\times120}{4} = 2400cm^2$

En particulier $A_2 = \alpha\ r^2 = 2\ 400$ où r est le rayon du disque central, donc :

$r = \sqrt{\dfrac{2400}{\pi}} = 20\sqrt{\dfrac{6}{\pi}} \approx 27{,}6 < \dfrac{80}{2}$. Ce qui convient.



120 :3 = 40

<u>Calcul de A_1 :</u>

On calcule d'abord l'aire B de l'intersection du disque et de la bande verticale de gauche.

$\dfrac{\alpha}{2} = \cos^{-1}\left(\dfrac{20}{r}\right)$ d'où $\alpha = 2\cos^{-1}\left(\dfrac{20}{r}\right) = 2\cos^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)$

$$B = \frac{\alpha}{2}r^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times r^2 = \frac{\alpha}{2}r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\alpha = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

Donc

$A_1 =$

$$40\times80 - \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) = 3200 - \frac{1200}{\pi}\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) - \sin\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\right)\right) \approx 3000cm^2 \neq 2400cm^2$$

Le partage « équitable » n'est donc pas possible.

b) Les dimensions du drapeau et le nombre de parties restant inchangés, l'aire du disque et son rayon restent aussi inchangés. $A_2 = 2\ 400$ cm² et $r = 20\sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$ cm.

Soit x la largeur de la bande centrale. x varie entre 0 et 120. Soit $A_1(x)$ l'aire de la partie 1 en fonction de x. A_1 est strictement décroissante entre 0 et 2 r et est affine décroissante entre 2 r et 120. On a notamment, lorsque le cercle est tangent au côté droit de la bande de gauche :

$$A_1(2r) = \frac{1}{2}(80\times120 - 80\times2r) = 80\times(60 - r) = 1600\times\left(3 - \sqrt{\frac{6}{\pi}}\right) \approx 2589cm^2 > 2400cm^2$$

Donc pour que l'on ait un partage « équitable » du drapeau il faut que le disque soit complètement contenu dans la bande centrale. Et les parties 1 et 3 sont alors des rectangles. Leur aire étant égale à celle de A_1, c'est-à-dire 2400cm², ces parties ont pour largeur $\dfrac{2400}{80} = 30cm$. La bande centrale à, quant à elle, pour largeur 120 – 30 – 30 = 60cm.

On vérifie que $A_4 = 9\ 600 - 3 \times 2\ 400 = 2\ 400$ cm²