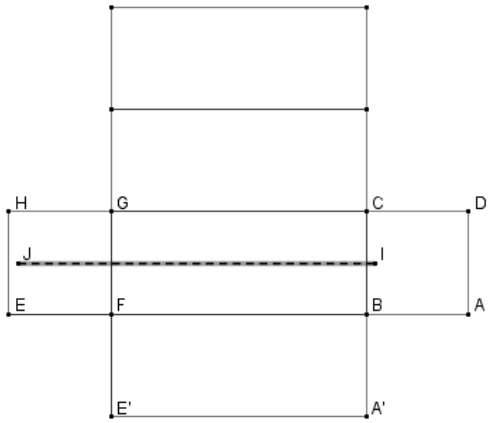
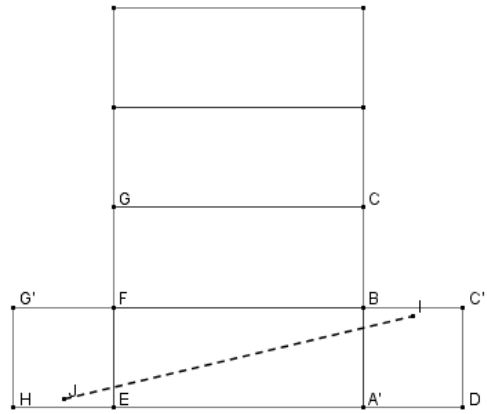
Correction Olympiades académiques 2009– séries autres que S

Exercice 1 :

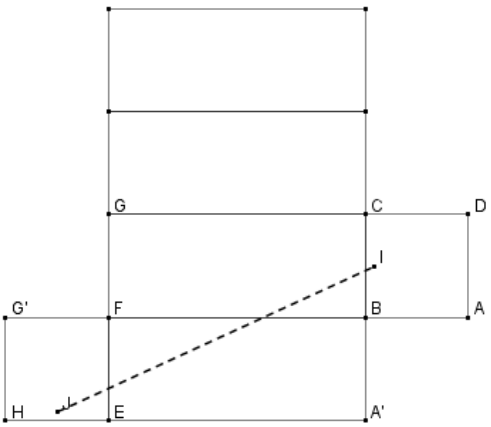
Sachant que, dans le plan, la ligne droite est le chemin le plus court entre deux points, la méthode pour résoudre le problème de la fourmi est de « tout mettre à plat » en réalisant un patron du pavé droit. Il y a plusieurs façons de réaliser ce patron, voici les trois possibilités potentiellement intéressantes pour le problème de la fourmi :



1e possibilité : IJ = 11 + 30 + 1 = 42 mètres

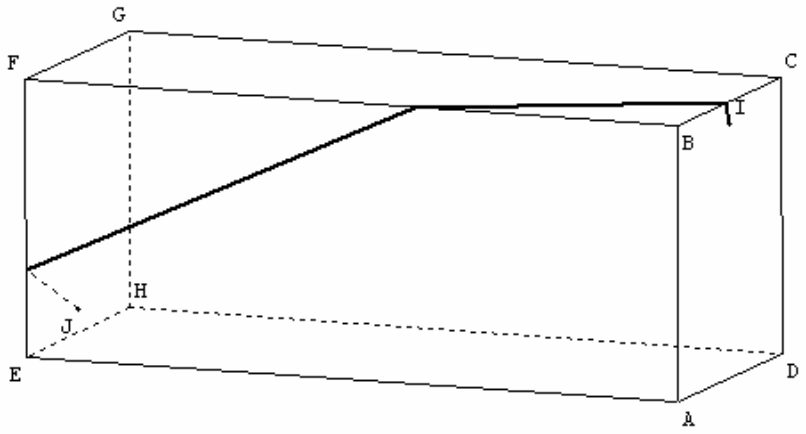


2e possibilité : IJ = $\sqrt{42^2 + 10^2}$ ≈ 43,17 mètres
(d'après le théorème de Pythagore)



3e possibilité : IJ = $\sqrt{37^2 + 17^2}$ ≈ 40,72 mètres
(d'après le théorème de Pythagore)

C'est ce 3e patron du pavé qui permet donc de minimiser le trajet de la fourmi, que l'on peut mieux visualiser ci-dessous :



Exercice 2 :

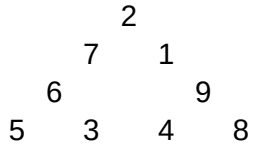
Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)

2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

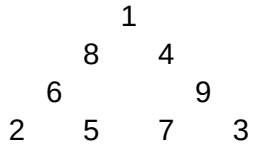


2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \le S \le \frac{24+45}{3}$

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :



4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.

Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où

$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

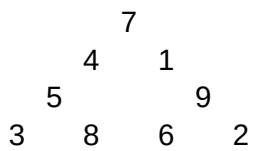
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b. Triangle 19-magique

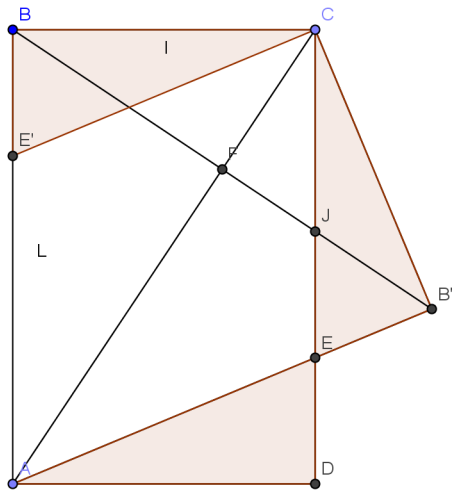


6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

18 n'est pas *S*-magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.

Exercice 3 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$
avec $L \geq 8$
soit : $l^2 = L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l = 0{,}25Ll$ d'où $c = 0{,}75L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Exercice 4:

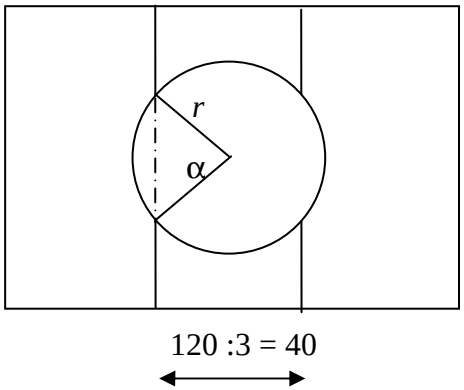
1 - Considérons un repère orthonormé d'origine O, dans lequel M aura pour coordonnées (x , y)

Soient A_1, A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.
$A_1 = 40\,x$
$A_2 = \dfrac{(120+120-x)\times(80-y)}{2}$
$A_3 = \dfrac{(120+120-x)\times y}{2}$
De $A_2 = A_3$ il résulte que $80-y = y$ d'où $y = 40$.
De $A_1 = A_3$ il résulte que $2x = 240-x$ d'où $x = 80$.
Le point M est unique et il a pour coordonnées (80 , 40) dans le repère ci-dessus.

2 - Soient A_1, A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.
Puisque les trois parties ont la même aire : $A_1 = A_2 = A_3 = \dfrac{80\times120}{3} = 3200 cm^2$
En particulier $A_2 = \alpha\ r^2 = 3\,200$ où r est le rayon du disque central, donc :
$r = \sqrt{\dfrac{3200}{\pi}} \approx 31{,}9 < \dfrac{80}{2}$

Donc le disque est bien contenu dans le drapeau. Quant aux parties 1 et 3 leur aire est bien égale à
$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ de l'aire du drapeau.

3 – a) Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 les aires respectives des parties 1, 2, 3 et 4.
Puisque les quatre parties ont la même aire : $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{80\times120}{4} = 2400cm^2$
En particulier $A_2 = \alpha\ r^2 = 2\ 400$ où r est le rayon du disque central, donc :
$r=\sqrt{\frac{2400}{\pi}}=20\sqrt{\frac{6}{\pi}}\approx 27{,}6<\frac{80}{2}$. Ce qui convient.



<u>Calcul de A_1 :</u>
On calcule d'abord l'aire B de l'intersection du disque et de la bande verticale de gauche.
$\frac{\alpha}{2}=\cos^{-1}\left(\frac{20}{r}\right)$ d'où $\alpha=2\cos^{-1}\left(\frac{20}{r}\right)=2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$
$B=\frac{\alpha}{2}r^2-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times r^2=\frac{\alpha}{2}r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\alpha=\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)$

Donc
$A_1 =$
$$40\times80-\frac{r^2}{2}(\alpha-\sin\alpha)=3200-\frac{1200}{\pi}\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)-\sin\left(2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)\right)\right)\approx 3000cm^2\neq 2400cm^2$$
Le partage « équitable » n'est donc pas possible.
b) Les dimensions du drapeau et le nombre de parties restant inchangés, l'aire du disque et son rayon restent aussi inchangés. $A_2 = 2\ 400\ cm^2$ et $r=20\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ cm.
Soit x la largeur de la bande centrale. x varie entre 0 et 120. Soit $A_1(x)$ l'aire de la partie 1 en fonction de x. A_1 est strictement décroissante entre 0 et 2 r et est affine décroissante entre 2 r et 120. On a notamment, lorsque le cercle est tangent au côté droit de la bande de gauche :
$$A_1(2r)=\frac{1}{2}(80\times120-80\times2r)=80\times(60-r)=1600\times\left(3-\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)\approx 2589cm^2>2400cm^2$$
Donc pour que l'on ait un partage « équitable » du drapeau il faut que le disque soit complètement contenu dans la bande centrale. Et les parties 1 et 3 sont alors des rectangles. Leur aire étant égale à celle de A_1, c'est-à-dire 2400cm², ces parties ont pour largeur $\frac{2400}{80}=30cm$. La bande centrale à, quant à elle, pour largeur 120 – 30 – 30 = 60cm.
On vérifie que $A_4 = 9\ 600 – 3 \times 2\ 400 = 2\ 400\ cm^2$