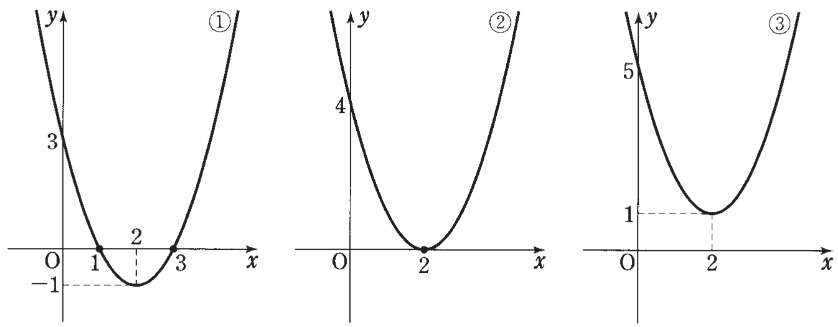
B 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

次の3つの2次関数について，そのグラフと x 軸の位置関係を調べてみよう。

$$y=x^2-4x+3 \quad \cdots\cdots \text{①}$$
$$y=x^2-4x+4 \quad \cdots\cdots \text{②}$$
$$y=x^2-4x+5 \quad \cdots\cdots \text{③}$$



①のグラフは，x 軸と2点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わっていて，交点の x 座標は2次方程式 $x^2-4x+3=0$ の異なる2つの実数解である。

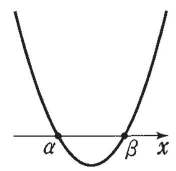
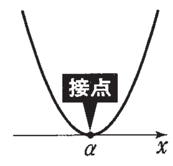
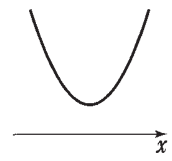
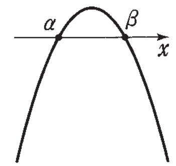
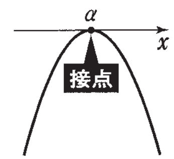
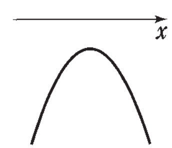
②のグラフは，x 軸とただ1点 $(2,\ 0)$ を共有し，共有点の x 座標は2次方程式 $x^2-4x+4=0$ の重解である。このようなとき，2次関数のグラフは x 軸に **接する** といい，その共有点を **接点** という。

③のグラフは x 軸と共有点をもたない。また，このとき，2次方程式 $x^2-4x+5=0$ は実数解をもたない。

一般に，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつとき，その x 座標は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。特に，2次関数のグラフが x 軸に接する場合，2次方程式の解は重解である。

また，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもたないとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数解をもたない。

このことと，95ページで学んだ2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数と判別式 $D=b^2-4ac$ の符号の関係から，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，次の表のようにまとめられる。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる2つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$	重解 $x=\alpha$	実数解はない
$a>0$ のとき $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
$a<0$ のとき $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係			
共有点の個数	2個	1個	0個

以上のことから，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係と，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

2次関数のグラフと x 軸の位置関係

$D>0 \iff$ **異なる2点で交わる**

$D=0 \iff$ **1点で接する**

$D<0 \iff$ **共有点をもたない**

$b^2-4ac<0$ のときは，前ページの ② の式

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots\cdots ②$$

の右辺は負となるので，② を満たす実数 x は存在しない。すなわち，
$b^2-4ac<0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，解の公式において $b=2b'$ とおくことにより，次のようになる。

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

よって，次の公式が得られる。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$b'^2-ac\geqq0$ のとき

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例 11 (1)　**2次方程式 $3x^2-9x+2=0$ を解く。**

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{9\pm\sqrt{57}}{6}$$

(2)　**2次方程式 $5x^2+6x-1=0$ を解く。**

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot(-1)}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{14}}{5}$$

終

練習 28　次の2次方程式を解け。

(1)　$3x^2+7x+1=0$　　(2)　$x^2-3x-2=0$

(3)　$x^2+2x-1=0$　　(4)　$2x^2-4x-7=0$

(5)　$9x^2-12x+4=0$　　(6)　$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

B 2次方程式の解の公式

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

の解を求める公式として，中学校で解の公式を学んだ。ここでそれを復習しておこう。

2次方程式①の左辺は，76ページで示したように平方完成すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる。したがって，2次方程式①は，次のように書ける。

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ゆえに　$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき，②の右辺は正または0であるから

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

この式の右辺は，a の正負にかかわらず，$\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となるから

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，次の **解の公式** が得られる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

【補足】 特に $b^2-4ac=0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

第2節 2次方程式と2次不等式

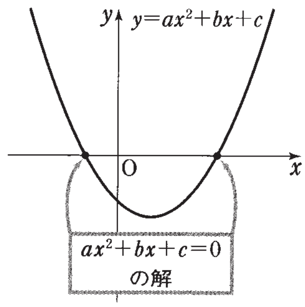
5 2次方程式

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ …… ①

のグラフが x 軸と共有点をもつとする。その共有点の y 座標は0であるから，共有点の x 座標は，

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …… ②

の解である。



したがって，2次関数 ① のグラフと x 軸の共有点について知りたいとき，2次方程式 ② の解について調べればよい。また逆に，2次方程式 ② の解について知りたいとき，2次関数 ① のグラフを利用すると，解を視覚的にとらえることができる。

ここでは，まず，2次方程式の解について確認しよう。

A 因数分解による解法

例 10 **2次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解く。**

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x-3)=0$

よって　$x+1=0$　または　$x-3=0$

すなわち　$x=-1$　または　$x=3$

ゆえに，解は　$x=-1,\ 3$　答

練習 27 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-6x+5=0$　　(2) $x^2-5x-24=0$

(3) $2x^2+5x+2=0$　　(4) $3x^2+7x-6=0$

C 2次方程式の実数解の個数

方程式における実数の解を，単に **実数解** という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解とその個数について考えよう。

[1]　$b^2-4ac>0$ のとき，解は $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であり，これらは異なる2つの実数解である。

[2]　$b^2-4ac=0$ のとき，解は $-\dfrac{b}{2a}$ であり，これはただ1つの実数解である。この場合は，2つの解が重なったものと考えて，この実数解を **重解** という。

[3]　$b^2-4ac<0$ のとき，前ページで述べたように，この2次方程式は実数解をもたない。

したがって，b^2-4ac の符号によって，解を次のように分類できる。

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
実数解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない
実数解の個数	2個	1個	0個

b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の **判別式** といい，普通 D で表す。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$ の符号について，次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ **異なる2つの実数解をもつ**

$D=0 \iff$ **ただ1つの実数解（重解）をもつ**

$D<0 \iff$ **実数解をもたない**

特に，「$D\geqq 0 \iff$ 実数解をもつ」が成り立つ。

第2節　2次方程式と2次不等式

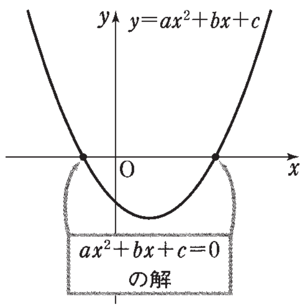
5　2次方程式

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①

のグラフが x 軸と共有点をもつとする。その共有点の y 座標は0であるから，共有点の x 座標は，

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ……②

の解である。



したがって，2次関数①のグラフと x 軸の共有点について知りたいとき，2次方程式②の解について調べればよい。また逆に，2次方程式②の解について知りたいとき，2次関数①のグラフを利用すると，解を視覚的にとらえることができる。

ここでは，まず，2次方程式の解について確認しよう。

A　因数分解による解法

例10　2次方程式 $x^2-2x-3=0$ を解く。

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x-3)=0$

よって　$x+1=0$　または　$x-3=0$

すなわち　$x=-1$　または　$x=3$

ゆえに，解は　$x=-1,\ 3$　答

練習27　次の2次方程式を解け。

(1)　$x^2-6x+5=0$　　(2)　$x^2-5x-24=0$

(3)　$2x^2+5x+2=0$　　(4)　$3x^2+7x-6=0$

B　2次方程式の解の公式

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の解を求める公式として，中学校で解の公式を学んだ。ここでそれを復習しておこう。

2次方程式①の左辺は，76ページで示したように平方完成すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる。したがって，2次方程式①は，次のように書ける。

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ゆえに

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots\cdots ②$$

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき，②の右辺は正または0であるから

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

この式の右辺は，a の正負にかかわらず，$\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ となるから

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，次の **解の公式** が得られる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

【補足】 特に $b^2-4ac=0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$b^2-4ac<0$ のときは，前ページの ② の式

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \cdots\cdots ②$$

の右辺は負となるので，② を満たす実数 x は存在しない。すなわち，$b^2-4ac<0$ のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数の解をもたない。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，解の公式において $b=2b'$ とおくことにより，次のようになる。

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

よって，次の公式が得られる。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$b'^2-ac\geqq0$ のとき

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例 11 (1) **2次方程式 $3x^2-9x+2=0$ を解く。**

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{9\pm\sqrt{57}}{6}$$

(2) **2次方程式 $5x^2+6x-1=0$ を解く。**

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot(-1)}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{14}}{5}$$

終

練習 28 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2+7x+1=0$　　(2) $x^2-3x-2=0$

(3) $x^2+2x-1=0$　　(4) $2x^2-4x-7=0$

(5) $9x^2-12x+4=0$　　(6) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

C 2次方程式の実数解の個数

方程式における実数の解を，単に **実数解** という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解とその個数について考えよう。

[1] $b^2-4ac>0$ のとき，解は $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であり，これらは異なる2つの実数解である。

[2] $b^2-4ac=0$ のとき，解は $-\dfrac{b}{2a}$ であり，これはただ1つの実数解である。この場合は，2つの解が重なったものと考えて，この実数解を **重解** という。

[3] $b^2-4ac<0$ のとき，前ページで述べたように，この2次方程式は実数解をもたない。

したがって，b^2-4ac の符号によって，解を次のように分類できる。

b^2-4ac の符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
実数解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない
実数解の個数	2個	1個	0個

b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の **判別式** といい，普通 D で表す。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解と判別式 $D=b^2-4ac$ の符号について，次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ **異なる2つの実数解をもつ**

$D=0 \iff$ **ただ1つの実数解（重解）をもつ**

$D<0 \iff$ **実数解をもたない**

特に，「$D\geqq0 \iff$ 実数解をもつ」が成り立つ。