GEOMETRIE DANS L'ESPACE

3D GEOMETRY

Disciplines Non Linguistiques
Mathématiques

- Séquence
- Séances
- Documents et ressources

Cette séquence s'insère dans le cours de mathématiques de première en continuité de celui de seconde, en offrant un retour sur différents objets de l'espace (polyèdres et non polyèdres), en proposant une ouverture culturelle sur les solides de Platon et en exposant les élèves à des situations de réflexion dans des solides usuels (cubes et tétraèdres).

Rédacteur :

- Stéphane PIGNOUX, Lycée Alexis de Tocqueville, Cherbourg
- Langue : anglais
- Classe : première S
- Durée indicative : 7 séances d'une heure

Thèmes abordés

Solides de l'espace, solides de Platon, formule d'Euler, propriétés dans les cubes et les tétraèdres, volume d'une pyramide et d'un tétraèdre.

Objectifs disciplinaires

Cette séquence s'étalant sur plusieurs semaines, permet aux élèves :

- de prendre le temps de s'approprier des notions travaillées depuis les classes de collège et d'en faire une synthèse ;

- d'être à l'issue beaucoup plus à l'aise avec les représentations graphiques de différents objets usuels de l'espace ;

- de revoir et de stabiliser des calculs de longueurs, d'aires et de volumes ;

- d'approfondir le cours de mathématiques des classes précédentes : d'où vient la formule du volume d'une pyramide vue en quatrième ? Comment calculer le volume d'un tétraèdre ?

- de mener des raisonnements de géométrie dans l'espace en parallèle de ceux au programme de la classe de première ;

- d'introduire des notions et des modes de raisonnement de géométrie dans l'espace au programme de la classe de terminale ;

- d'apporter une ouverture épistémologique et culturelle plus ou moins approfondie (en fonction des motivations de la classe et du temps consacré) ;

- d'enrichir le vocabulaire spécifique anglais.

Références au programme

Partie « géométrie » du programme de mathématiques :

« Sections planes d'un cube, d'un tétraèdre : pour aborder ces problèmes, les élèves pourront s'aider de manipulations de solides… Ce travail, en consolidant la perception de l'espace, facilitera l'introduction du repérage cartésien »

Niveaux de compétence en langue

Expression orale en continu : B1	Expression orale en interaction : B1	Compréhension de l'écrit : B1	Expression écrite : B1	Compréhension de l'oral : B1

Principaux supports documentaires utilisés lors de la séance

Geometry 3D shapes

http://www.learner.org/interactives/geometry/3d.html

Timaeus

http://www.ellopos.net/elpenor/physis/plato-timaeus/elements.asp

Platonic Solid Rock

http://www.youtube.com/watch?v=Ye24b3ebHcw

Fiche analytique

Notion(s) centrale(s)

Polyèdres, propriétés des solides de Platon, mener une démonstration dans l'espace.

Dimensions culturelle/interculturelle/interdisciplinaire

Le coeur de la séquence fera référence à la démarche philosophique de Platon.

Activité(s) langagière(s) dominante(s) travaillée(s) au cours de la séquence

Les activités envisagées sont de plusieurs types :

- lecture personnelle de textes permettant d'aborder les notions et le vocabulaire spécifique ;

- travaux d'écritures pour expliquer ou définir une notion, ou interpréter mathématiquement des idées développées philosophiquement par Platon ;

- échanges oraux soit entre élèves, soit en plénière avec toute la classe et l'enseignant ;

- travaux par groupes sur diverses situations géométriques à étudier permettant des échanges oraux entre les membres du groupe, conduisant à la rédaction d'un rapport écrit synthétisant les recherches et résultats obtenus par le groupe, et aboutissant à une présentation orale par chaque groupe devant le reste de la classe.

Exploitation pédagogique

Démarche pédagogique

La présentation des notions s'effectue en anglais au travers de textes ou de mises des élèves en situations, mais n'est à aucun moment organisée par le professeur sous la forme d'un « cours magistral ».

- 1ère séance : *Part I : measuring the volume of the classroom*

Cette séance proposée en première séance de l'année permet aux élèves qui n'ont pas suivi l'option « euro » en seconde de découvrir à travers une activité très contextualisée le vocabulaire de base de la géométrie dans l'espace et celui des calculs numériques. L'activité est axée sur la prise de parole dans un groupe et l'acquisition de vocabulaire « simple » et directement réinvesti dans la rédaction du rapport final expliquant les mesures prises et les calculs menés pour aboutir au résultat.

- 2ème séance : *Part II : studying a document and learning new vocabulary*

Le but de cette séance est de faire revoir aux élèves les différents solides usuels de l'espace classés en deux catégories : les polyèdres, et les non-polyèdres, tout en continuant à enrichir le vocabulaire spécifique en langue anglaise. La séance débute par une lecture individuelle d'un document-texte, suivie d'un tableau à remplir permettant de relier un mot-clé et sa définition, sachant que, selon le cas, soit la définition est donnée et l'élève doit retrouver dans le texte le mot-clé correspondant, soit le mot-clé est fourni et l'élève doit rédiger la définition correspondante. Puis par paires, les élèves doivent comparer leurs réponses et se corriger si besoin. Un bilan est fait en plénière pour que l'ensemble des élèves ait les informations correctes, et donner des repères pour la prononciation des mots-clés.

- 3ème séance : *Part III : building polyhedra with "polydrons"*

La séance débute par un « warmer » en plénière, occasion pour les élèves de confirmer l'appropriation du vocabulaire et de corriger si nécessaire les prononciations délicates. Puis, la séance se poursuit en petits groupes de 3 à 4 élèves à qui on remet des polydrons. Au début, le professeur laisse chaque groupe libre de construire tout polyèdre de son choix (convexe ou non), puis rythme la séance en rajoutant successivement des conditions de plus en plus contraignantes pour chaque nouvelle construction, amenant ainsi les élèves par leurs propres manipulations à la génération des seuls 5 solides vérifiant un ensemble de propriétés géométriques : ce sont les solides de Platon.

- 4ème séance : *Part IV : polyhedra, polyhedra !!!*

La séance débute par une vidéo illustrant par le commentaire et l'image ce qui avait été vu la semaine précédente avec les polydrons. C'est l'occasion de redéfinir pourquoi seulement 5 solides de Platon et donner leurs noms. Puis, la séance se poursuit en groupes. A l'intérieur de chaque groupe, les élèves doivent d'abord intuiter pour les polygones une relation entre le nombre de sommets et le nombre de côtés, puis étendre cette conjecture aux 5 solides de Platon. C'est l'occasion de définir ici la formule d'Euler et de réfléchir sur la validité de cette formule avec d'autres polyèdres, et tenter de construire un exemple de solide ne vérifiant pas cette relation.

- 5ème séance : *Part V : studying a document*

Pendant de cette séance, les élèves reçoivent un extrait du TIMEE de Platon dans lequel l'auteur explique sa conception du monde à partir de triangles, ainsi que les cinq combinaisons possibles aboutissant à la construction des 5 solides portant son nom. C'est l'occasion pour les élèves de sortir du cadre purement mathématique et de s'ouvrir à la pensée philosophique qui a précédé l'émergence de la science.
La lecture du document est évidemment individuelle, mais son exploitation et la recherche des réponses aux questions posées est laissée libre : soit en individuel, soit à deux ou trois élèves mettant en commun leurs compréhension du texte.

- 6ème séance : *Part VI : working in groups*

Les élèves sont répartis en 4 groupes de 3 à 4 personnes. Chaque groupe reçoit un sujet différent, et doit communiquer exclusivement en anglais pour comprendre et rechercher les solutions aux problèmes posés, puis rédiger un rapport écrit explicatif de sa démarche, et enfin préparer une présentation orale pour la semaine suivante.

- 7ème séance : *Part VII : oral presentations*

Cette séance s'articule exclusivement autour des présentations orales de chaque groupe venant exposer le résultat de ses recherches au reste de la classe. C'est l'occasion de faire parler en continu tous les élèves, et aussi d'associer le professeur d'anglais afin de lui permettre de porter un oeil critique sur le niveau de langue, pendant que le professeur de DNL se focalisera lui plus particulièrement sur le propos mathématique. Lors de cette séance, les élèves se retrouvent alors dans une situation analogue à celle de l'épreuve de Baccalauréat.

Évaluation

Proposition d'évaluation

<u>1ère séance</u> : évaluation écrite possible basée sur la rédaction des rapports sur le volume de la classe. Néanmoins, comme il s'agit de construire un groupe d'élèves n'ayant pas nécessairement suivi l'option « euro » l'année précédente, une évaluation « conventionnelle » notée n'est sans doute ni très représentative ni très judicieuse…
<u>6ème séance</u> : évaluation écrite basée sur la rédaction des démonstrations des réponses aux problèmes géométriques posés.
<u>7ème séance</u> : évaluation orale pour chacun des membres des groupes venant présenter leur recherche au reste de la classe.
Enfin tout au long de la séquence, évaluation en continu de l'implication de chaque élève.

Ouverture culturelle et interdisciplinarité

Ouverture culturelle

On pourra faire faire une recherche documentaire par les élèves à propos de l'histoire de la pensée de Platon et l'Ecole d'Athènes, qui peut être prolongée par une partie de l'épisode 1 de la série « the story of maths » réalisée par la BBC.

Interdisciplinarité

L'interdisciplinarité de cette séquence avec l'histoire et la philosophie est ici évidente, et le professeur de philosophie de terminale pourra être associé pour intervenir soit cette année pour apporter son point de vue, soit l'année suivante dans la cadre du cours de philosophie.

Euro section 2^{nd} year	**SEQUENCE 1** **3D GEOMETRY**

<u>Part I</u> : measuring the volume of the classroom (group work)

1. Using tape measures, take all dimensions you need to compute the volume of the classroom.

Write a report explaining how you proceeded.

2. Compute the weight of air in this room considering that one litre air weighs 1.3 grams.

What do you think about your result ?

Euro section **2nd year**	**SEQUENCE 1** **3D GEOMETRY**

Part II : studying a document and learning new vocabulary (individual work)

1. Read the following document :

We live in a three-dimensional world. Every object you can see or touch has three dimensions that can be measured: length, width, and height. The room you are sitting in can be described by these three dimensions. Even you can be described by these three dimensions.

There are many types of three-dimensional shapes. You've surely seen spheres, cylinders and cubes before. In this lesson, you'll learn about particular solids called *polyhedra* and you'll also learn about two special types of polyhedra: prisms and pyramids.

Polyhedra

Dice , matches boxes 

, soccer balls  are all examples of polyhedra.

More generally, a three-dimensional shape whose faces are polygons is known as a *polyhedron*. This term comes from the Greek words *poly*, which means "many," and *hedron*, which means "face." So, quite literally, a polyhedron is a three-dimensional object with many faces.

The faces of a cube are squares. The faces of a rectangular prism are rectangles. And the faces of a truncated icosahedron are pentagons and hexagons. The other parts of a polyhedron are its edges, the line segments along which two faces intersect, and its vertices, the points at which three or more faces meet.

Prisms

A prism is a polyhedron for which the top and bottom faces (known as the bases) are congruent polygons, and all other faces (known as the lateral faces) are parallelograms or rectangles. Technically, when the sides are rectangles, the shape is known as a right prism, indicating that the lateral faces meet the sides of the base at right angles. In this lesson, when we use the term prism, we mean a right prism. But there are other types of prisms, too.

A prism is described by the shape of its base. For instance, a rectangular prism (cuboid) has bases that are rectangles, and a pentagonal prism has bases that are pentagons.

Pyramids

A pyramid is a polyhedron for which the base is a polygon and all lateral faces are triangles. In this lesson, we'll only concern ourselves with pyramids whose lateral faces are congruent — that is, they're the same size and shape. Technically, when the lateral faces are congruent triangles, the shape is known as a right pyramid, indicating that the apex — the vertex at which the lateral faces meet — is directly above the center of the base. In this lesson, when we use the term pyramid, we mean a right pyramid. But there are other types of pyramids, too.
A pyramid is typically described by the shape of its base. For instance, a triangular pyramid has a base that is a triangle, and a hexagonal pyramid has a base that is a hexagon.

For any solid, the *surface area* is exactly the area of all of the outside surfaces of a three-dimensional object. And *volume* is all of the space inside a three-dimensional object.

Adapted from http://www.learner.org

2. Complete the following grid

Find out the English word corresponding to its definition, or conversely, give a defintion of the given English keyword, and add their French versions:

	English keyword or expression	English definition	French keyword or expression
1		The distance value between two points	
2		The distance value that is lateral (side to side)	
3	The height		
4	A sphere		
5		A three-dimensional figure with two circular bases that are parallel and congruent	
6	A polyhedron (plur. polyhedra)		
7	A right prism		
8		A polyhedron whose all faces are rectangles	
9	A right pyramid		
10		Said for two figures that have the same size and shape, i.e., one can be transformed into the other by an isometry	
11		One of the surfaces of a polyhedron	
12		The segment along which two faces meet	
13		The point at which two or more edges meet	

3. In pairs, compare your answers and corect your mistakes if needed.

Euro section 2nd year	**SEQUENCE 1** **3D GEOMETRY**

<u>Part III</u> : building polyhedra with “polydrons”

You are given “polydrons” composed of equilateral triangles, squares, regular pentagons and regular hexagons, all polygons with sides of the same length. These “polydrons” will enable you to build polyhedra.

1. <u>1st step</u>

Build any polyhedron you want.

Name each of them and describe it as precisely as you can.

2. <u>2nd step</u>

- Inside the collection of polyhedra you have, keep only the ones which are convex and have the same regular polygon for each of their faces.
- Can you build other polyhedra under these conditions ?

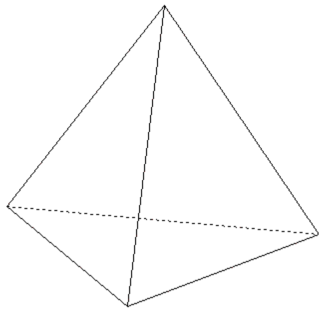
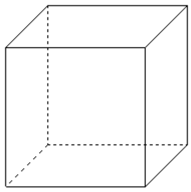
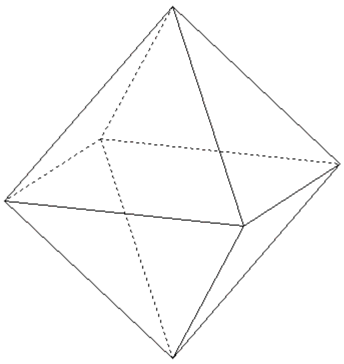
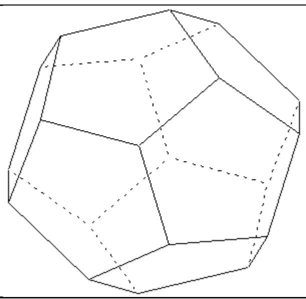
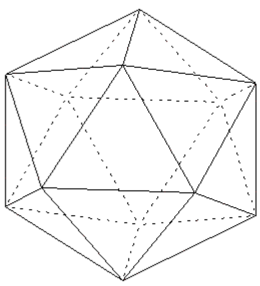
3. <u>3nd step</u>

- Inside the collection of polyhedra you have, keep only the ones which are convex, have the same regular polygon for each of their faces and the same number of faces meeting together at each vertex.
- How many polyhedra can you build under these conditions ?
- Define them as precisely as you can.

Euro section 2nd year	<u>SEQUENCE 1</u> 3D GEOMETRY

<u>Part IV</u> : polyhedra, polyhedra !!! (in groups of 4)

1. Any polygon can be defined through a relation involving the number of its vertices (denoted V) and the number of its sides (denoted S): which one ?
2. a) Conjecture an equivalent relation from the following Platonic polyhedra:

b) Sketch other polyhedra and check if the formula is still valid.

Euro section 2nd year	SEQUENCE 1 3D GEOMETRY

Part V : studying an authentical document

Timaeus is a theoretical treatise of Plato in the form of a Socratic dialogue, written *circa* 360 BC. The work puts forward speculation on the nature of the physical world.

The triangles	53c-55d	Τὰ τρίγωνα

(...) every plane rectilinear figure is composed of triangles; (...) Then let us choose two triangles (...) one isosceles, the other having (...) its hypotenuse twice the lesser side. When two such triangles are joined at the diagonal, and this is repeated three times, and the triangles rest their diagonals and shorter sides on the same point as a centre, a single equilateral triangle is formed out of six triangles; and four equilateral triangles, if put together, make out (...) the first solid form (...).

The second species of solid is formed out of the same triangles, which unite as eight equilateral triangles and form (...) the second body (...). And the third body is made up of 120 triangular elements, forming twelve solid angles, each of them (...) having altogether twenty bases, each of which is an equilateral triangle. The one element [that is, the triangle which has its hypotenuse twice the lesser side] having generated these figures, generated no more;

but the isosceles triangle produced the fourth elementary figure, which is compounded of four such triangles, joining their right angles in a centre, and forming one equilateral quadrangle. Six of these united form eight solid angles (...); the figure of the body thus composed is a cube, having six plane quadrangular equilateral bases.

There was yet a fifth combination which God used in the delineation of the universe.

http://www.ellopos.net/elpenor/physis/plato-timaeus/triangles.asp

Questions

1. Give a definition of an isosceles triangle.
2. Sketch the second kind of triangles described by Plato: " the other having (...)its hypotenuse twice the lesser side".
3. Make the construction of an equilateral triangle as defined by Plato.
4. What is the first "solid form" described by Timaeus ?
5. Describe the "second body" and the "third body".
6. Explain : "The one element [that is, the triangle which has its hypotenuse twice the lesser side] having generated these figures, generated no more".
7. Explain what Plato calls an "equilateral quadrangle".
8. How is generated a cube for Plato ?
9. What is the "fifth combination which God used in the delineation of the universe" ?

Part VI : working in groups

Group 1 : slicing a cube

1. Sketch a cube with edge *a*.
2. Compute the radius of its circumscribing sphere.
3. Sketch the 4 diameters of the circumscribed sphere. They slice the cube into solids. Describe them precisely.
4. Evaluate the volume of each of these solids.
5. Conclusion : build the general formula giving the volume of such a solid.

Euro section 2nd year	<u>**SEQUENCE 1**</u> **3D GEOMETRY**

<u>Part VII</u> : working in groups

<u>Group 2</u> : volume of a tetrahedron

1. Remind the formula giving the area of a triangle.

   The aim of this activity is now to find out the formula giving the volume a tetrahedron.

   Consider a tetraedron with area of one face B, height h and volume V.

2. Sketch a picture.
3. Cut it with three planes each of them parallel to a face and passing through the midpoints of the edges.
4. Define the different solids obtained from the initial tetrahedron.
5. a) Explain why three of them are congruent.
   b) Evaluate their volume denoted t, in terms of V.
6. Consider the fourth solid.
   a) What is the solid obtained if you complete it with one solid of volume t ?
   b) Evaluate the volume of this fourth solid denoted p.
7. Deduce the expression of V, in terms of B and h.

Euro section 2nd year	SEQUENCE 1 3D GEOMETRY

<u>Part VI</u> : working in groups

<u>Group 3</u> : properties of regular tetrahedra (1)

1. Sketch a regular tetrahedron called ABCD with edge *a*.
2. <u>Property of the edges</u>

Prove that line (CD) is perpendicular to plane (ABI) with I the midpoint of [CD].

Deduce that line (CD) is perpendicular to line (AB).

Explain the general property in a regular tetrahedron you've proved.

3. <u>Properties of the medians</u>

<u>Definition</u> : a median of a tetrahedron is a line segment connecting a vertex with the centroid of the opposite face.

What's the centroid in a triangle ?

b) Naming S the centroid of BCD, prove that line (CD) is perpendicular to line (AS). Similarly, we would prove that line (BC) is perpendicular to line (AS).

What can you deduce for the median (AS) ?

Explain the general property in a regular tetrahedron you've proved.

e) Prove that the four medians in a tetrahedraon are concurrent and that their intersection point is the centroid of the tetrahedron.

Euro section **2^{nd} year**	**SEQUENCE 1** **3D GEOMETRY**

Part VI : working in groups

Group 4 : properties of regular tetrahedra (2)

1. Sketch a regular tetrahedron called ABCD with edge *a* and name I, J, K, L M and N the midpoints of its sides [AB], [AC], [AD], [BC], [BD] and [CD].

Definition 1 : a bimedian of a tetrahedron is a line segment connecting the midpoints of opposite edges.

2. Define the bimedians of ABCD.

3. Property n°1

   Prove that the bimedians bisect each other.

4. Property n°2

   Definition 2 : the perpendicular bisector plane (or bisecting plane) of a segment is the plane that cut that segment orthogonally at its midpoint.

   Consequence : the bisecting plane of segment [AB] is the set of all the points that are equidistant from A and B.

   Prove that (CDI) is the bisecting plane of [AB].

   Deduce that line (IN) is perpendicular to line (AB).

   Prove that line (IN) is perpendicular to line (CD).

   Explain the general property you've proved.

5. Property n°3

   Prove that the bimedians intersect at the centroid of the tetrahedron.