

# « Un champ de tangentes »

Situation de référence

## 1 Contexte

Niveau. première (programme rentrée 2019) ; terminale S (programme rentrée 2012)

Chapitre sous-jacent. Fonction exponentielle

Chapitres prérequis ou réinvestis. Dérivation

## 2 Description

### 2.1 Énoncé

**Problème 1.** Existe-t-il une fonction égale à sa dérivée ?

- La fonction nulle.
- Oui. Est-ce la seule ?
- ... (Les élèves restent sans voix. On les aide au moyen d'une deuxième question.)

**Question 2.** Comment traduire cette contrainte *graphiquement* ?

### 2.2 Quelques étapes clefs

#### Analyse

- Supposons que  $\mathcal{C}_f$  passe par le point de coordonnées  $(3 ; 2)$ . Alors la tangente  $y$  a pour coefficient directeur 2.
- Idem avec d'autres points.
- Illustration avec un logiciel de géométrie dynamique : un point mobile et la tangente en ce point.
- Champ de tangentes

#### Synthèse

- Dessin d'une courbe représentative solution.
- Imaginer une goutte d'eau qui tombe, obligée de suivre les « micro-tangentes ».
- Impossibilité des segments de droites : une solution ne peut contenir aucun « morceau » affine.
- Peut-on en dessiner une autre courbe solution ?
- Peut-on en dessiner une autre, qui passe par tel point ?

### 2.3 Observations/Conjectures

- Plusieurs courbes sont possibles (une infinité).
- Ces courbes sont toutes superposables.
- On passe de l'une à l'autre par translation « horizontale ».
- Les fonctions représentées sont croissantes.
- Il existe aussi des courbes solutions au-dessous de l'axe des abscisses.  
Elles sont symétriques des précédentes par rapport à l'axe des abscisses.
- Aucune de ces courbes ne croise l'axe des abscisses.
- Comment faire référence à l'une d'entre elles spécifiquement ?

### 2.4 Nouveaux acquis

- La contrainte  $f' = f$  peut être traduite graphiquement par un champ de tangentes.
- Il existe une infinité de fonctions solutions.
- Leurs courbes représentatives sont superposables.
- Pour spécifier l'une d'elles, on peut choisir un « point de passage obligé », appelé aussi *condition initiale*.
- Les mathématiciens s'intéressent à une de ces fonctions en particulier : celle qui satisfait la condition  $f(0) = 1$ .  
On l'appelle *fonction exponentielle* ; on la désigne par  $\exp$ .
- On lit  $\exp(1) \approx 2,7$ .



### 3 Ressources et références

- Champ de tangentes défini par  $f' = f$
- Document imprimé pour l'élève [A4]
- Figure dynamique GeoGebra [.ggb] [.html]

